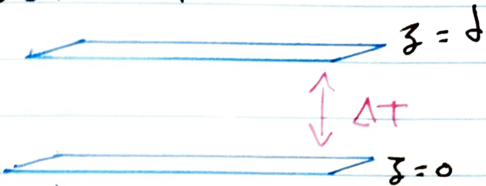
5 INSTABILITE HYDRODYNAMIQUE

5.1 Instabilité de Rayleigh-Bernard



→ Soit un fluide contenu entre 2 plaques horizontales :
On note la différence de température entre les 2 plaques ΔT

→ Si $\Delta T \equiv T_d - T_0 < 0$, le système est instable et de la convection s'installera à partir d'une certaine valeur critique.

⊙ Linéarisation des équations :

→ On suppose que la densité du fluide varie linéairement avec T :

$$\rho = \rho(\tilde{T}) + \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{T=\tilde{T}} (T - \tilde{T}) + \mathcal{O}\left(\cancel{(T-\tilde{T})^2}\right)$$

DEF On introduit le coefficient d'expansion thermique $\alpha \equiv \frac{-1}{\tilde{\rho}} \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{\tilde{T}}$

On a $\rho = \tilde{\rho}\left(1 - \alpha (T - \tilde{T})\right)$

DEF L'équation de la chaleur dans un milieu immobile est

$$\partial_t T = \kappa \nabla^2 T$$

Dans un milieu qui se déplace, $D_t T = \partial_t T + \underbrace{(\bar{u}.\bar{\nabla})T}_{\text{advection}} = \underbrace{\kappa \nabla^2 T}_{\text{diffusion}}$

→ Pour un fluide stationnaire et immobile : $\kappa \nabla^2 T = 0$

$\Rightarrow T_0(z) = T_\ell - \frac{z}{d}\Delta T \qquad (T_\ell \equiv T_0(0))$

↳ Le profil de densité est alors $\rho_0(z) = \tilde{\rho}\left(1 - \alpha(T(z) - \tilde{T})\right)$

→ Par Navier-Stokes : $\rho D_t \bar{u} = -\bar{\nabla} p + \rho \bar{g} + \nu \nabla^2 \bar{u}$

$$\bar{\nabla} p_0 = \rho_0 \bar{g} \Leftrightarrow \frac{d p_0}{dz} = -\rho_0(z) g$$

→ On doit résoudre :

$$\rho(\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i) = -\partial_i p + \mu \nabla^2 u_i + \rho g_i$$

→ On effectue alors l'approximation de Boussinesq, càd on linéarise l'équation.

On décompose $T = T_0(z) + T_1$, $\rho = \rho_0(z) + \rho_1$, $p = p_0(z) + p_1$, $\vec{u} = \vec{u}_1$

et on ne garde que les termes d'ordre 1 au max :

$\hookrightarrow \rho = \tilde{\rho}(1 - \alpha(T_0 + T_1 - \tilde{T})) = \rho_0(z) - \alpha\tilde{\rho}\,T_1 \Rightarrow \rho_1(z) = -\alpha\tilde{\rho}\,T_1(z)$

Chaleur $\hookrightarrow \partial_t T + (\vec{u}.\vec{\nabla})T = K\nabla^2 T \rightsquigarrow \partial_t T_1 + (\vec{u}_1.\vec{\nabla})T_0 = K\nabla^2 T_1$

N-S $\hookrightarrow \tilde{\rho}\,\partial_t \vec{u}_1 = -\vec{\nabla}p_1 + \mu\nabla^2\vec{u}_1 + \rho_1\vec{g} \quad \| \vec{\nabla}\times(\cdot)$

$\Leftrightarrow \tilde{\rho}\,\partial_t\, \vec{\nabla}\times\vec{u}_1 = \mu\nabla^2(\vec{\nabla}\times\vec{u}_1) + \vec{\nabla}\times(-\alpha\tilde{\rho}\,T_1\vec{g}) \quad \| (\cdot)\frac{1}{\tilde{\rho}}$

$\Leftrightarrow \partial_t\, \vec{\nabla}\times\vec{u}_1 = \nu\nabla^2(\vec{\nabla}\times\vec{u}_1) + \vec{\nabla}\times(-\alpha T_1\vec{g})$

? $\Leftrightarrow (\partial_t - \nu\nabla^2)\vec{\nabla}\times\vec{u}_1 = -\alpha(\vec{\nabla}T_1)\times\vec{g} \quad \| \vec{\nabla}\times(\cdot)$

$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})$

$$\Leftrightarrow (\partial_t - \nu\nabla^2)(-\nabla^2\vec{u}_1) = -\alpha\,\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}T_1\times\vec{g})$$
$$= -\alpha\left[(\vec{g}.\vec{\nabla})\vec{\nabla}T_1 - \vec{g}\,\nabla^2 T_1\right]$$

$$\Leftrightarrow (\partial_t - \nu\nabla^2)(-\nabla^2\vec{u}_1) = -\alpha\left[-g\,\partial_z\partial_z T_1 - \vec{g}\,(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)T_1\right]$$

→ Regardons la composante verticale w_1 :

$$(\partial_t - \nu\nabla^2)\nabla^2 w_1 = \alpha\left(-g\partial_z^2 + g(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\right)T_1$$
$$= \alpha g(\partial_x^2 + \partial_y^2)T_1 \quad \| (\partial_t - K\nabla^2)$$

$$\Leftrightarrow (\partial_t - \nu\nabla^2)(\partial_t - K\nabla^2)\nabla^2 w_1 = \alpha g\,(\partial_t - K\nabla^2)\underbrace{\nabla_\perp^2}_{\equiv \partial_x^2 + \partial_y^2} T_1$$

Or, $\partial_t T_1 + (\vec{u}_1.\nabla)T_0 = K\nabla^2 T_1 \Leftrightarrow (\partial_t - K\nabla^2)T_1 = -w_1\frac{dT_0}{dz}$

$$\hookrightarrow \Leftrightarrow (\partial_t - \nu\nabla^2)(\partial_t - K\nabla^2)\nabla^2 w_1 = -\alpha g\,\frac{dT_0}{dz}\,\nabla_\perp^2 w_1$$

Ne dépend plus que de w_1 !

→ On cherche une solution à variable separée :

$$w_1 = W(z)\, f(x,y)\, e^{st}$$

↳ $\nabla^2 w_1 = W'' f e^{st} + W \nabla_\perp^2 f e^{st} = (D^2 - a^2) W f e^{st}$

avec : $D \equiv \partial_z$ et $\nabla_\perp^2 f = -a^2 f$

↳ $(\partial_t - K\nabla^2)\nabla^2 w_1 = s(D^2-a^2) W f e^{st} - K(D^2-a^2)^2 W f e^{st}$

$= [s - K(D^2-a^2)](D^2-a^2) W f e^{st}$

↳ $(\partial_t - \nu\nabla^2)(\partial_t - K\nabla^2)\nabla^2 w_1 = [s-\nu(D^2-a^2)][s-K(D^2-a^2)](D^2-a^2) W f e^{st}$

↳ $-\alpha g \frac{dT_0}{dz} \nabla_\perp^2 (W e^{st}) = \alpha g \frac{dT_0}{dz} a^2 W f e^{st}$

On obtient : $[\nu(D^2-a^2)-s][K(D^2-a^2)-s](D^2-a^2)W = \alpha g \frac{dT_0}{dz} a^2 W$

équation du 6^e ordre

p9?

Conditions aux bords :

→ En $z=0,d$, on a : $u_1 = v_1 = w_1 = T_1 = 0$ au départ. $\Rightarrow W(0) = W(d) = 0$

De plus, $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \partial_x u_1 + \partial_y v_1 + \partial_z w_1 = 0$ partout. En particulier, en $z=0,d$, on a $\partial_z w_1 = 0 \Rightarrow DW = 0$

→ Sur les bords $T_1 = 0$. Alors

$[\partial_t - \nu\nabla^2)\nabla^2 w_1 = \alpha g(\partial_x^2 + \partial_y^2) T_1$

$\Leftrightarrow (s - \nu(D^2-a^2))(D^2-a^2) W = 0$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow D^4 W - (2a^2 - \frac{s}{\nu}) D^2 W = 0$ en $z=0,d$

→ Pour simplifier, on va supposer que le fluide glisse librement sur les parois. Alors :

$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\nu S_{ij}$ et $\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$

devient (car $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$) $\partial_x w_1 + \partial_z u_1 = 0$ $\quad \partial_y w_1 + \partial_z v_1 = 0$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow D^2 W = D^4 W = W = 0$ en $z = 0,d$

⊙ Résolution :

On doit résoudre $[\nu(D^2-a^2)-s][K(D^2-a^2)-s](D^2-a^2)W$
$$= \alpha g \frac{dT_0}{dz} a^2 W$$

→ Le domaine étant fini, on décompose W en $\mathcal{F}$:
$$W = \sin\left(\frac{N\pi z}{d}\right), \quad N = 1, 2, \ldots$$

En substituant, on obtient :
$$(\nu \tilde{a}^2 + s)(K\tilde{a}^2 + s)\tilde{a}^2 + \alpha g \frac{dT_0}{dz} a^2 = 0 \qquad \text{où } \tilde{a} = \frac{N^2\pi^2}{d^2} + a^2$$

$$\Leftrightarrow K\nu\tilde{a}^4 + s(K+\nu)\tilde{a}^2 + s^2 + \frac{\alpha g}{\tilde{a}^2}\frac{dT_0}{dz}a^2 = 0 \qquad \text{avec } \frac{dT_0}{dz} = -\frac{\Delta T}{d}$$

$$\hookrightarrow s = -\frac{1}{2}(K+\nu)\tilde{a}^2 \pm \sqrt{\frac{(K+\nu)^2\tilde{a}^4}{4} - \left(K\nu\tilde{a}^4 - \frac{\alpha g}{\tilde{a}^2}\frac{\Delta T}{d}a^2\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}(K+\nu)\tilde{a}^2 \pm \sqrt{\frac{(K-\nu)^2\tilde{a}^4}{4} + \frac{\alpha g}{\tilde{a}^2}\frac{\Delta T}{d}a^2} \quad (>0 \Rightarrow \text{instable}) \text{ et } \mathbb{R}$$

⊙ Instabilité :

$w_1 = W f e^{st}$

→ Le système est instable si s possède une partie réelle positive
$$\Leftrightarrow \sqrt{(\cdot)} > \frac{1}{2}(K+\nu)\tilde{a}^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(K-\nu)^2\tilde{a}^4}{4} + \frac{\alpha g}{\tilde{a}^2}\frac{\Delta T}{d}a^2 > \frac{1}{4}(K+\nu)^2\tilde{a}^2$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{\alpha g \Delta T}{\nu K d} > \frac{1}{a^2}\left(a^2 + \frac{N^2\pi^2}{d^2}\right)^3 \quad \rightsquigarrow a \text{ est } \neq \text{ pour chaque mode}$$

→ Le système est inconditionnellement si le membre de gauche est tjs plus petit que celui de droite $\forall a, N$

↳ Le RHS est croissant avec N, on regarde $N=1$. On a
$$(*) = \frac{1}{a^2}\left(a^2 + \pi^2/d^2\right)^3 \text{ qu'on doit minimiser p/r à } a \text{ (ou } a^2)$$

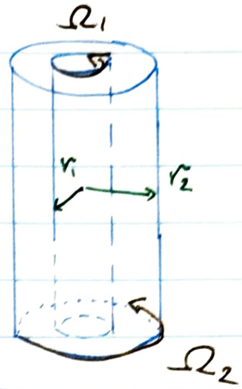
$$\Rightarrow \frac{d}{d(a^2)}(*) = \frac{-1}{a^4}\left(a^2 + \pi^2/d^2\right)^3 + \frac{1}{a^2}3\left(a^2+\pi^2/d^2\right) = 0 \Leftrightarrow a^2 = \pi^2/2d^2$$

$$\Rightarrow \Delta T_{min} \cdot \frac{\alpha g}{\nu K d} = \frac{2d^2}{\pi^2}\left(\frac{3}{2}\frac{\pi^2}{d^2}\right)^3 = \frac{27}{4}\frac{\pi^4}{d^4}$$

On définit le nombre de Rayleigh Ra selon

$$Ra = \frac{\alpha g d^3 \Delta T_{min}}{\nu \kappa}$$

5.2 Instabilité de Taylor-Couette



→ Par le point 2.9, on avait :

$u_\theta(r) = Ar + B/r$ où

$$A = \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \qquad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

→ Pour $\Omega_1 > 0$ et $\Omega_2 > 0$, l'écoulement devient instable lorsque Ω_1 dépasse une certaine valeur. Des rouleaux apparaissent, connus comme vortex de Taylor.

• Analyse de stabilité linéaire :

→ Considère un écoulement décomposé en une base + fluctuation, en coord. cylindrique : $\bar{u} = [u_r', U_\theta(r) + u_\theta', u_z']$

avec $p = P_0(r) + p(r,z,t)$ et où $u'_{r,\theta,z} = u'_{r,\theta,z}(r,z,t)$

$\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_z^2$ ⇒ Les équations de N-S sont : $\rho(\partial_t + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\bar{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{u}$

$$\partial_t u_r + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla}) u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{-1}{\rho}\partial_r p + \nu\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\partial_\theta u_\theta\right)$$

$$\partial_t u_\theta + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla}) u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = \frac{-1}{\rho r}\partial_\theta p + \nu\left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2}\partial_\theta u_r - \frac{u_\theta}{r^2}\right)$$

$$\partial_t u_z + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla}) u_z = \frac{-1}{\rho}\partial_z p + \nu \nabla^2 u_z$$

et l'incompressibilité : $\frac{1}{r}\partial_r(u_r \cdot r) + \frac{1}{r}\partial_\theta u_\theta + \partial_z u_z = 0$

→ En ne gardant que les termes de 1^e ordre :

$$\partial_t u_r' - 2\frac{U_\theta u_\theta'}{r} = -\frac{1}{\rho}\partial_r p' + \nu\left(\nabla^2 u_r' - u_r'/r^2\right)$$

$$\partial_t u_\theta' + u_r'\partial_r U_\theta + \frac{u_r' U_\theta}{r} = \nu\left(\nabla^2 u_\theta' - u_\theta'/r^2\right)$$

$$\partial_t u_z' = -\frac{1}{\rho}\partial_z p' + \nu\nabla^2 u_z'$$

→ On fait l'hypothèse du Narrow gap : $d = r_2 - r_1 \ll r_1$

Alors : $\partial_r^2 u_r' \sim O(u_r'/d^2)$, $\frac{1}{r}\partial_r u_r' \sim O(u_r'/r_1 d)$

$u_r'/r^2 \sim O(u_r'/r_1^2)$

On approxime alors :

$$\nabla^2 u_r' = \partial_r^2 u_r' + \frac{1}{r}\partial_r u_r' + \partial_z^2 u_r' - u_r/r^2 \simeq \partial_r^2 u_r' + \partial_z^2 u_r'$$

On pose alors $\tilde{\nabla}^2 \equiv \partial_r^2 + \partial_z^2$ et on obtient :

$$(\partial_t - \nu\tilde{\nabla}^2)u_r' - 2U_\theta u_\theta'/r = -\frac{1}{\rho}\partial_r p' \qquad (1)$$

$$(\partial_t - \nu\tilde{\nabla}^2)u_\theta' + 2Au_r' = 0 \qquad (2)$$ con $U_\theta = Ar + B/r$

$\hookrightarrow \partial_r U_\theta + \frac{U_\theta}{r} = A - \frac{B}{r^2} + A + \frac{B}{r^2} = 2A$

$$(\partial_t - \nu\tilde{\nabla}^2)u_z' = -\frac{1}{\rho}\partial_z p' \qquad (3)$$

$$\partial_r u_r' + \partial_z u_z' = 0 \qquad (4)$$

→ On élimine p en effectuant $\partial_z(1)$ et $\partial_r(3)$:

$$(\partial_t - \nu\tilde{\nabla}^2)\partial_z u_r' - 2\frac{U_\theta}{r}\partial_z u_\theta' = -\frac{1}{\rho}\partial_{rz}^2 p'$$

$$(\partial_t - \nu\tilde{\nabla}^2)\partial_r u_z' = -\frac{1}{\rho}\partial_{rz}^2 p'$$

$$\Rightarrow (\partial_t - \nu\tilde{\nabla}^2)(\partial_z u_r' - \partial_r u_z') = 2\frac{U_\theta}{r}\partial_z u_\theta'$$

$$\Leftrightarrow (\partial_t - \nu\tilde{\nabla}^2)\tilde{\nabla}^2 u_r' = 2\frac{U_\theta}{r}\partial_z^2 u_\theta'$$

→ On cherche des solutions sous la forme de modes normaux :

$$u_r' = \mathrm{Re}\{\hat{u}_r(r)\cos nz\, e^{st}\}$$
$$u_\theta' = \mathrm{Re}\{\hat{u}_\theta(r)\cos nz\, e^{st}\}$$

En substituant, on obtient :

$$[s-\nu(D^2-n^2)](D^2-n^2)\hat{u}_r = -2\frac{U_\theta}{r}n^2\hat{u}_\theta$$

où $D \equiv \frac{d}{dr}$

$$[s-\nu(D^2-n^2)]\hat{u}_\theta = -2A\hat{u}_r$$

→ On fait une approximation supplémentaire :

$$\Omega_1 \simeq \Omega_2 \simeq \tilde{\Omega} \equiv (\Omega_1+\Omega_2)/2$$

On obtient alors :

(5) $[\nu(D^2-n^2)-s](D^2-n^2)\hat{u}_r = 2\tilde{\Omega}n^2\hat{u}_\theta$ $\quad \| (\nu(D^2-n^2)-s)$ (6)

(6) $[\nu(D^2-n^2)-s]\hat{u}_\theta = +2A\hat{u}_r$

(5) $\Leftrightarrow [\nu(D^2-n^2)-s]^2(D^2-n^2)\hat{u}_r = 4A\tilde{\Omega}n^2\hat{u}_r$ (6)

Conditions aux bords :

→ $u_r' = u_\theta' = u_z' = 0$ en $r=r_1$ et $r=r_2$ (3 conditions)

→ Comme $\partial_r u_r' + \partial_z u_z'$ → $D\hat{u}_r = 0$ en $r = r_{1,2}$ (1 cond.)

→ Par (5) $[\nu D^4 - n^2\nu D^2 - n^2\nu D^2 + \nu n^4 - sD^2 + sn^2]\hat{u}_r = 0$

→ $[D^4 - (2n^2 + s/\nu)D^2]\hat{u}_r = 0$ en $r = r_{1,2}$

Critère de stabilité :

On s'intéresse au moment où s change de signe :

(6) ⇒ $\nu^2(D^2-n^2)^3\hat{u}_r = 4A\tilde{\Omega}n^2\hat{u}_r$

On pose $x \equiv \frac{r-r_1}{d}$ ⇝ $D = \frac{1}{d}\cdot\frac{d}{dx}$. Alors

$$\nu^2\left(\frac{1}{d^2}\frac{d^2}{dx^2} - n^2\right)^3 = 4A\tilde{\Omega}n^2\hat{u}_r$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2\right)^3\hat{u}_r = \frac{4A\tilde{\Omega}d^4}{\nu^2}a^2\hat{u}_r \quad \text{avec } a \equiv nd$$

On définit le nombre de Taylor $Ta = \frac{2(\Omega_1 r_1^2 - \Omega_2 r_2^2)\tilde{\Omega} d^3}{\nu^2 r_1}$

Alors $\left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2\right)^3 \hat{u}_r = -Ta \cdot a^2 \hat{u}_r$

On obtient finalement :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2\right)^3 \hat{u}_r = -Ta \cdot a^2 \hat{u}_r \quad \text{avec } \hat{u}_r = d_x \hat{u}_r = d_x^4 \hat{u}_r - 2a^2 d_x^2 \hat{u}_r = 0$$

en $r = r_{1,2}$

↳ Si on veut déterminer la Ta apd laquelle est instable, il faut minimiser Ta p/r à a.